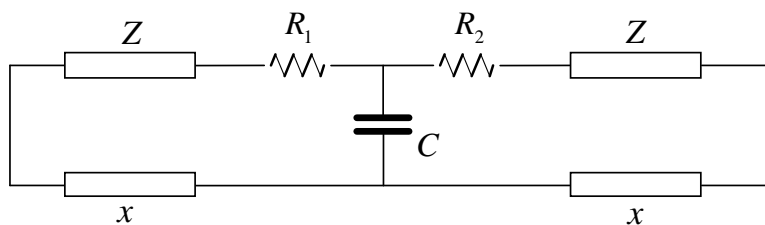


# ESERCIZIO 11 - TUTORATO PROPAGAZIONE A.A. 06/07

08-09/05/2007

Esercizio 1 (10 punti / 18)

Prova scritta di propagazione (2° parte) - 06 06 2005



$$Z = 100\Omega \quad R_1 = 50\text{m}\Omega$$

$$R_2 = 150\text{m}\Omega \quad C = 0.1\text{pF}$$

$$\epsilon_r = 2 \quad f_{ris} = 5\text{GHz}$$

Nel risuonatore di figura tutte le linee sono riempite con un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon_r = 2$ .  
Determinare il minimo valore di  $x$  per il quale il circuito risuona a 5 GHz, e calcolare il relativo fattore di merito.

## SOLUZIONI

$$x = 4.7773 \text{ mm}$$

$$Q = 902$$

## **Soluzione:**

Il risuonatore in figura è un risuonatore reale con perdite. Valgono le stesse premesse viste nell'esercizio precedente del tutorato (esercizio 10).

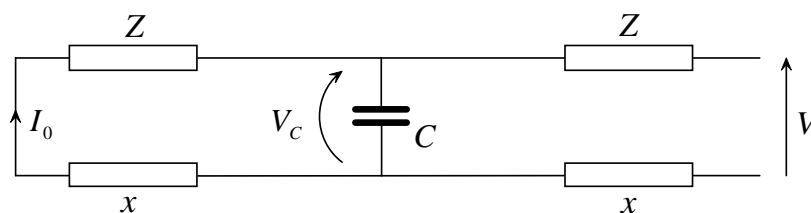
In questo esercizio una stima molto grossolana del fattore di merito si calcola come:

$$Q_{stima} = \frac{Z}{R_2} = \frac{100}{150 \cdot 10^{-3}} = 667$$

Possiamo allora provare ad applicare la tecnica perturbativa per lo studio del risuonatore.

Il circuito ideale è quello in cui le due resistenze vengono approssimate con dei corti circuiti ( che è la loro migliore approssimazione visto che sono molto piccole rispetto all'impedenza caratteristica delle linee di trasmissione).

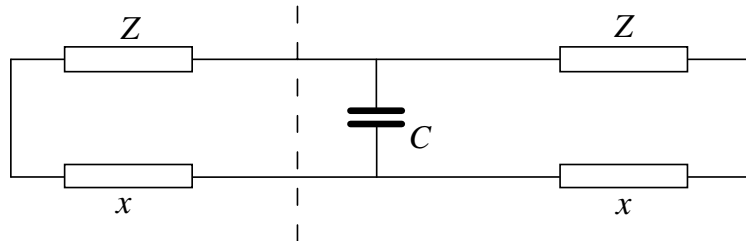
Il circuito a cui applicare la tecnica perturbativa è allora il seguente:



Naturalmente per il calcolo di energia e potenza dissipata occorre “alimentare” il risuonatore, ovvero fissare il valore di una corrente o di una tensione. Nel nostro caso tale scelta è ricaduta sulla corrente del corto circuito di sinistra denominata  $I_0$ .

### A) Calcolo di $x$ .

Il testo chiede di calcolare la lunghezza minima  $x$  affinché il circuito risuoni a 5 GHz.



Scelta una sezione arbitraria del circuito, dobbiamo imporre le due condizioni per avere risonanza, cioè:

$$\vec{Z} + \vec{Z} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{Y} + \vec{Y} = 0$$

In genere, salvo casi particolari, nelle condizioni in cui le due impedenze o le due ammettenze non vanno contemporaneamente ad infinito ne basta una sola.

Considerata la presenza della capacità in parallelo, utilizziamo la condizione sulle ammettenze:

- a sinistra della sezione vedo una linea di trasmissione chiusa in corto circuito, quindi di ammettenza:

$$\vec{Y} = \frac{1}{j \cdot Z \cdot \tan(\beta \cdot x)}$$

- a destra della sezione vedo il parallelo della suscettanza capacitiva con una linea di trasmissione lasciata a circuito aperto:

$$\vec{Y} = j \cdot \omega \cdot C + j \cdot \frac{1}{Z} \cdot \tan(\beta \cdot x)$$

Dove  $\omega$  e  $\beta$  sono pulsazione alla risonanza e costante di propagazione sulle due linee (uguale per entrambe perché le due linee sono uguali in quanto hanno stessa impedenza e materiale dielettrico):

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^9 = 31.4159 \cdot 10^9 \frac{rad}{s}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \cdot \omega}{c_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot 31.4159 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 148.0961 \text{ } m^{-1}$$

Alla risonanza la somma di queste due ammettenze deve essere nulla:

$$\frac{1}{j \cdot Z \cdot \tan(\beta \cdot x)} + j \cdot \omega \cdot C + j \cdot \frac{1}{Z} \cdot \tan(\beta \cdot x) = 0$$

Questa relazione è sufficiente per determinare tutte le frequenze di risonanza del circuito in quanto le due impedenze non vanno mai contemporaneamente all'infinito.

Posto per comodità  $T = \tan(\beta \cdot x)$ , dobbiamo risolvere:

$$\frac{1}{j \cdot Z \cdot T} + j \cdot \omega \cdot C + j \cdot \frac{1}{Z} \cdot T = 0$$

$$-\frac{1}{T} + \omega \cdot Z \cdot C + T = 0$$

$$T^2 + \omega \cdot Z \cdot C \cdot T - 1 = 0$$

notare che  $T=0$  non è soluzione dell'equazione (quindi la razionalizzazione dell'equazione non elimina soluzioni possibili).

La soluzione per  $T$  vale:

$$T_{1,2} = -\frac{\omega \cdot Z \cdot C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega \cdot Z \cdot C}{2}\right)^2 + 1} = \begin{cases} 0.8552 \\ -1.1693 \end{cases}$$

di conseguenza

$$\beta \cdot x = \begin{cases} \arctan(0.8552) + n\pi \big|_{n=0} = 0.7075 \quad (40.54^\circ) \\ \arctan(-1.1693) + n'\pi \big|_{n'=1} = 2.2783 \quad (130.54^\circ) \end{cases} \quad x = \begin{cases} \frac{0.7075}{\beta} = \frac{0.7075}{148.0961} = 4.7773 \text{ mm} \\ \frac{2.2783}{\beta} = \frac{2.2783}{148.0961} = 15.3839 \text{ mm} \end{cases}$$

La lunghezza minima  $x$  per la quale il circuito risuona a 5 GHz vale allora:

$$x = 4.7773 \text{ mm}$$

## B) Calcolo dell'energia elettromagnetica.

Poiché alla risonanza l'energia elettrica totale è uguale all'energia magnetica totale immagazzinata nel circuito, cioè:

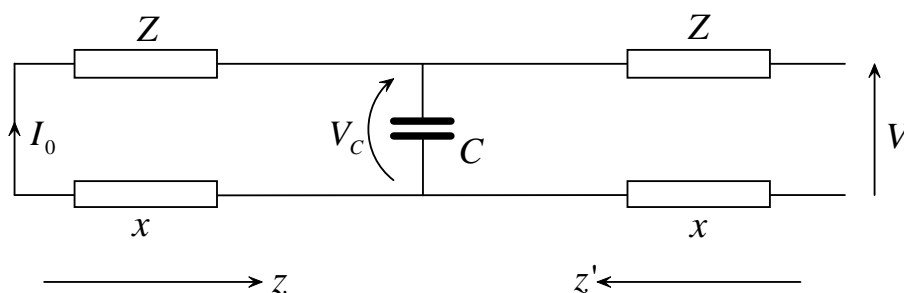
$$W_e = W_m$$

Allora l'energia elettromagnetica totale si può calcolare come:

$$W_{em} = 2 \cdot W_e = 2 \cdot W_m$$

Alla risonanza è allora sufficiente calcolare un solo tipo di energia, elettrica o magnetica, per avere tutta l'energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito complessivo.

I calcoli successivi faranno riferimento alla figura illustrata di seguito:



Supponiamo di voler calcolare l'energia magnetica del circuito; per una generica linea di lunghezza  $d$  e di induttanza per unità di lunghezza pari a  $L$ , questa si calcola come:

$$W_m = \frac{1}{4} \cdot \int_0^d L \cdot |I(z)|^2 dz$$

Nel nostro caso, le due linee in cui calcolare l'energia magnetica presentano stessa lunghezza  $x$  calcolata al punto precedente e stessa induttanza per unità di lunghezza di valore:

$$L_1 = L_2 = \frac{Z \cdot \beta}{\omega} = 471.4 \frac{nH}{m}$$

L'andamento della corrente sulla linea di sinistra e secondo il sistema di riferimento in figura vale:

$$I_1(z) = I_0 \cdot \cos(\beta \cdot z)$$

mentre l'andamento della corrente sulla linea di destra, sempre secondo il sistema di riferimento in figura vale:

$$I_2(z') = -j \cdot \frac{V}{Z} \cdot \sin(\beta \cdot z')$$

Poiché l'energia sarà calcolata in riferimento ad un unico parametro circuitale, nel nostro caso è stata scelta la corrente sul corto circuito di sinistra ( $I_0$ ), è utile riferire tutte le grandezze circuitali a tale parametro.

In particolare si può legare il valore della tensione  $V$ , sul circuito aperto a destra, alla corrente  $I_0$ , sul cortocircuito a sinistra, sfruttando il fatto che le tensioni in uscita dalle due linee è la stessa e pari a  $V_C$ :

- per la linea di sinistra vale:  $V_C = V_1(x) = -j \cdot Z \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot x)$
- per la linea di destra vale:  $V_C = V_2(x) = V \cdot \cos(\beta \cdot x)$

conseguenza:

$$V \cdot \cos(\beta \cdot x) = -j \cdot Z \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

$$V = -j \cdot Z \cdot I_0 \cdot \tan(\beta \cdot x)$$

Quindi anche la corrente  $I_2(z)$  è esprimibile in funzione di  $I_0$ :

$$I_2(z') = -I_0 \cdot \tan(\beta \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot z')$$

Noti gli andamenti delle correnti lungo le linee, siamo in grado di calcolare l'energia magnetica.

Nella linea a sinistra abbiamo:

$$\begin{aligned}
 W_{m1} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^x L_1 \cdot |I_1(z)|^2 dz = \frac{1}{4} \cdot \int_0^x L_1 \cdot |I_0|^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z) dz = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot L_1 \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^x \frac{1 + \cos(2 \cdot \beta \cdot z)}{2} dz = \frac{1}{4} \cdot L_1 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{z}{2} \Big|_0^x + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z)}{4 \cdot \beta} \Big|_0^x \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot L_1 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot x)}{4 \cdot \beta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 471.4 \cdot 10^{-9} \cdot |I_0|^2 \cdot 4.0563 \cdot 10^{-3} = \left( 478.037 \cdot \frac{pJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
 \end{aligned}$$

Nella linea a destra viceversa:

$$\begin{aligned}
 W_{m2} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^x L_2 \cdot |I_2(z')|^2 dz' = \frac{1}{4} \cdot \int_0^x L_2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z') \cdot dz' = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot L_2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^x \frac{1 - \cos(2 \cdot \beta \cdot z')}{2} dz' = \frac{1}{4} \cdot L_2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{z'}{2} \Big|_0^x - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z')}{4 \cdot \beta} \Big|_0^x \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot L_2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot x)}{4 \cdot \beta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 471.4 \cdot 10^{-9} \cdot 0.73 \cdot |I_0|^2 \cdot 7.21 \cdot 10^{-4} = \left( 62.141 \cdot \frac{pJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
 \end{aligned}$$

L'energia magnetica totale vale dunque:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \left(478.037 \cdot \frac{pJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2 + \left(62.141 \cdot \frac{pJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2 = \left(540.178 \cdot \frac{pJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2$$

Mentre l'energia elettromagnetica totale vale:

$$W_{em} = 2 \cdot W_m = 2 \cdot \left(540.178 \cdot \frac{pJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2 = \left(1.08 \cdot \frac{nJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2$$

Il calcolo dell'energia elettromagnetica sarebbe così concluso ma, a fini didattici, è utile calcolare anche l'energia elettrica immagazzinata nel circuito e verificare che sia uguale, come deve essere in condizioni di risonanza, a quella magnetica.

Supponiamo di voler calcolare l'energia elettrica del circuito; per una generica linea di lunghezza  $d$  e di capacità per unità di lunghezza pari a  $C$ , questa si calcola come:

$$W_e = \frac{1}{4} \cdot \int_0^d C \cdot |V(z)|^2 dz$$

Nel nostro caso, le due linee in cui calcolare l'energia magnetica presentano stessa lunghezza  $x$  calcolata al punto precedente e stessa capacità per unità di lunghezza di valore:

$$C_1 = C_2 = \frac{\beta}{\omega \cdot Z} = 47.14 \frac{pF}{m}$$

Analogamente a quanto già visto per le correnti, l'andamento della tensione sulla linea di sinistra può scriversi come:

$$V_1(z) = -j \cdot Z \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot z)$$

mentre quello della tensione sulla linea di destra vale:

$$V_2(z') = V \cdot \cos(\beta \cdot z')$$

e tenendo conto del legame tra  $V$  e  $I_0$

$$V_2(z') = -j \cdot Z \cdot I_0 \cdot \tan(\beta \cdot x) \cdot \cos(\beta \cdot z')$$

Noti gli andamenti delle tensioni lungo le linee, siamo in grado di calcolare l'energia elettrica.

Nella linea a sinistra abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{e1} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^x C_1 \cdot |V_1(z)|^2 dz = \frac{1}{4} \cdot \int_0^x C_1 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) dz = \\ &= \frac{1}{4} \cdot C_1 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^x \frac{1 - \cos(2 \cdot \beta \cdot z)}{2} dz = \frac{1}{4} \cdot C_1 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{z}{2} \Big|_0^x - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z)}{4 \cdot \beta} \Big|_0^x \right] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot C_1 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot x)}{4 \cdot \beta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 47.14 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot |I_0|^2 \cdot 7.21 \cdot 10^{-4} = \left( 84.969 \cdot \frac{PJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2 \end{aligned}$$

Nella linea a destra viceversa:

$$\begin{aligned}
W_{e2} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^x C_2 \cdot |V_2(z')|^2 dz' = \frac{1}{4} \cdot \int_0^x C_2 \cdot Z^2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z') \cdot dz' = \\
&= \frac{1}{4} \cdot C_2 \cdot Z^2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^x \frac{1 + \cos(2 \cdot \beta \cdot z')}{2} \cdot dz' = \\
&= \frac{1}{4} \cdot C_2 \cdot Z^2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{z'}{2} \Big|_0^x + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z')}{4 \cdot \beta} \Big|_0^x \right] = \\
&= \frac{1}{4} \cdot C_2 \cdot Z^2 \cdot \tan^2(\beta \cdot x) \cdot |I_0|^2 \cdot \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot x)}{4 \cdot \beta} \right] = \\
&= \frac{1}{4} \cdot 41.74 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 0.73 \cdot |I_0|^2 \cdot 4.0563 \cdot 10^{-3} = \left( 349.606 \cdot \frac{pJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
\end{aligned}$$

Oltre all'energia elettrica immagazzinata nelle due linee, è presente anche l'energia elettrica immagazzinata nella capacità che contribuisce all'energia elettrica totale del circuito; questa vale:

$$\begin{aligned}
W_{eC} &= \frac{1}{4} \cdot C \cdot |V_C|^2 = \frac{1}{4} \cdot C \cdot |-j \cdot Z \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot x)|^2 = \\
&= \frac{1}{4} \cdot C \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot x) = \frac{1}{4} \cdot 0.1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot |I_0|^2 \cdot 0.4224 = \left( 105.603 \cdot \frac{pJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
\end{aligned}$$

L'energia elettrica totale vale dunque:

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} + W_{eC} = (84.969 + 349.606 + 105.603) \frac{pJ}{A^2} \cdot |I_0|^2 = \left( 540.178 \cdot \frac{pJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2$$

che come si vede coincide con quella magnetica.

Mentre l'energia elettromagnetica totale si può calcolare anche come:

$$W_{em} = 2 \cdot W_e = 2 \cdot \left( 540.178 \cdot \frac{pJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2 = \left( 1.08 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2$$

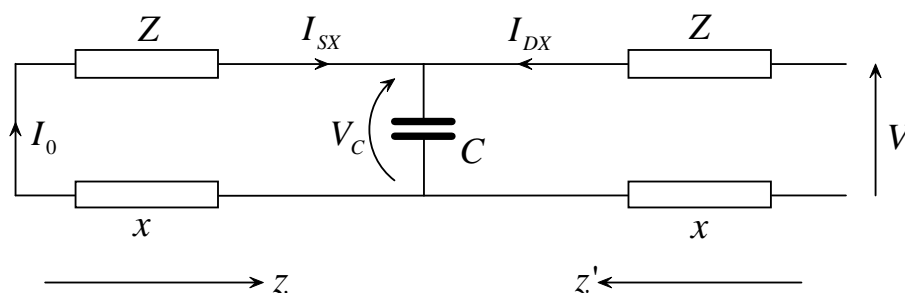
### C) Calcolo della Potenza dissipata e del Fattore di Merito.

Ricordando ora che il fattore di merito si calcola come

$$Q = \frac{\omega \cdot W_{em}}{P_D}$$

rimane da calcolare la potenza dissipata nel risuonatore che è evidentemente la potenza dissipata dalle due resistenze presenti nel circuito; per il principio di sovrapposizione degli effetti, la potenza totale dissipata sarà la loro somma.

Ricordando che per quanto riguarda il calcolo della potenza dissipata, occorre assumere la stessa configurazione di tensione e corrente del risuonatore ideale, allora nella resistenza  $R_1$  scorrerà una corrente uguale a  $I_{SX}$ , mentre nella resistenza  $R_2$  scorrerà una corrente uguale a  $I_{DX}$  (secondo lo schema circuitale seguente).



La potenza dissipata da  $R_1$  vale:

$$P_{R1} = \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot |I_{SX}|^2$$

dove

$$I_{SX} = I_1(z = x) = I_0 \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

e quindi

$$P_{R1} = \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot |I_{SX}|^2 = \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot |I_0 \cdot \cos(\beta \cdot x)|^2 = 14.44 \frac{mW}{A^2} \cdot |I_0|^2$$

Viceversa la potenza dissipata da  $R_2$  vale:

$$P_{R2} = \frac{1}{2} \cdot R_2 \cdot |I_{DX}|^2$$

dove

$$I_{DX} = I_2(z' = x) = -I_0 \cdot \tan(\beta \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

e quindi

$$P_{R2} = \frac{1}{2} \cdot R_2 \cdot |I_{DX}|^2 = \frac{1}{2} \cdot R_2 \cdot |-I_0 \cdot \tan(\beta \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x)|^2 = 23.17 \frac{mW}{A^2} \cdot |I_0|^2$$

La potenza totale dissipata vale dunque:

$$P_D = P_{R1} + P_{R2} = (14.44 + 23.17) \frac{mW}{A^2} \cdot |I_0|^2 = 37.61 \frac{mW}{A^2} \cdot |I_0|^2$$

Infine il fattore di merito vale:

$$Q = \frac{\omega \cdot W_{em}}{P_D} = \frac{31.416 \cdot 10^9 \frac{1}{s} \cdot 1.08 \cdot 10^{-9} \frac{J}{A^2} \cdot |I_0|^2}{37.61 \cdot 10^{-3} \frac{W}{A^2} \cdot |I_0|^2} = 902$$

A questo punto, considerato che il fattore di merito ottenuto con la tecnica perturbativa è effettivamente grande, significa che i risultati ottenuti sono corretti.

L'errore commesso è dell'ordine di  $\frac{1}{2Q} = 5.5 \cdot 10^{-4}$ .